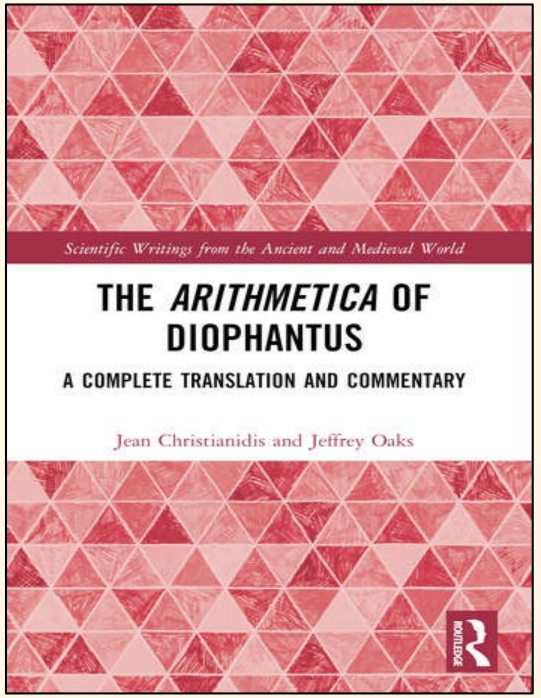
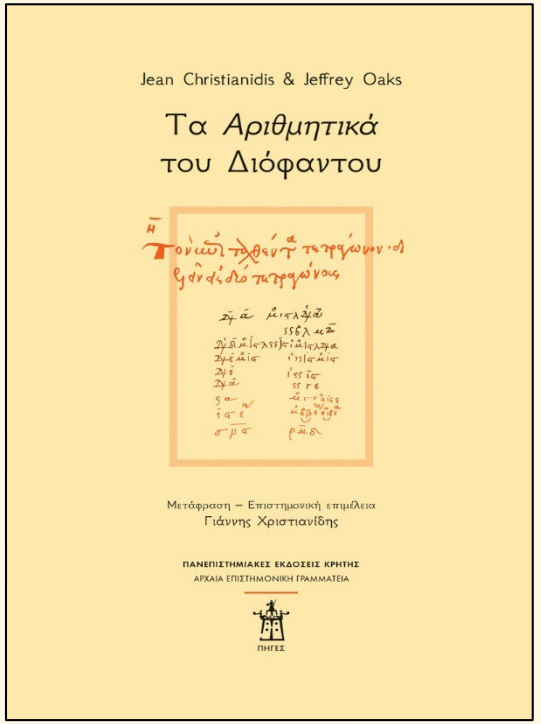
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Ιστορίας και Φιλοσοφίας της Επιστήμης

ΔΙΟΦΑΝΤΙΚΕΣ ΕΡΕΥΝΕΣ

Γιάννης Χριστιανίδης

Ομότιμος Καθηγητής Ιστορίας των Μαθηματικών (ΕΚΠΑ)
Αντεπιστέλλον μέλος της Διεθνούς Ακαδημίας Ιστορίας της Επιστήμης (AIHS)
Μέλος της Διεθνούς Επιτροπής Ιστορίας των Μαθηματικών (ICHM)





Υπό έκδοση βιβλίο στις Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης

ΔΙΟΦΑΝΤΙΚΕΣ ΕΡΕΥΝΕΣ

Περιεχόμενα

1. Απομυθοποιώντας τη μέθοδο του Διόφαντου: Η προ-μοντέρνα άλγεβρα στην υπηρεσία της επίλυσης προβλημάτων
2. Φωτίζοντας ένα αινιγματικό σημείο των διοφαντικών επιλύσεων
3. Η έννοια της ὑποστάσεως στα *Αριθμητικά* του Διόφαντου
4. Η μέθοδος της ανάλυσης και σύνθεσης και η επίλυση προβλημάτων στα Αριθμητικά του Διόφαντου: δύο διαφορετικοί τρόποι του συλλογίζεσθαι στα αρχαία ελληνικά μαθηματικά
5. Ο Διόφαντος στη βυζαντινή αγιογραφική γραμματεία

Το πλαίσιο της ομιλίας

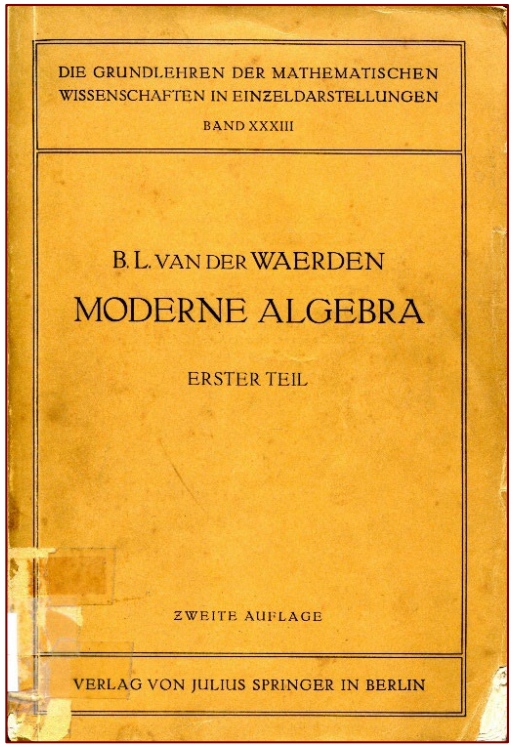
- Λίγα κείμενα των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών έχουν προκαλέσει τόσο διαφορετικές ερμηνευτικές προσεγγίσεις όσο τα *Αριθμητικά* του Διόφαντου.
- Από τον ύστερο 9ο αιώνα —όταν η άλγεβρα απέκτησε το όνομά της και το έργο του Διόφαντου μεταφράστηκε στα αραβικά— μέχρι τον πρώιμο 17ο αιώνα, οι μαθηματικοί θεωρούσαν ότι τα *Αριθμητικά* είναι έργο άλγεβρας.
- Από τον πρώιμο 17ο αιώνα και μετά, όταν πια η παλαιά **Προ-μοντέρνα** (αρχαία και μεσαιωνική) **Άλγεβρα** έγινε παρωχημένη, και στο προσκήνιο ήρθε η νέα, **Μοντέρνα Άλγεβρα**, τα *Αριθμητικά* αποτέλεσαν πηγή έμπνευσης για το ταχέως αναδυόμενο τότε πεδίο της Θεωρίας Αριθμών.
- Τις τελευταίες δεκαετίες, μερικοί ιστορικοί των μαθηματικών εξέφρασαν την άποψη ότι τα *Αριθμητικά* είναι μακρινός πρόδρομος της σύγχρονης αλγεβρικής γεωμετρίας — μια άποψη που υποστηρίζεται ένθερμα από μερικούς ιστορικούς των αραβικών κυρίως μαθηματικών, οι οποίοι αρνούνται να δεχτούν ότι η άλγεβρα χρησιμοποιούνταν ως μέθοδος επίλυσης προβλημάτων πολλούς αιώνες πριν από την έλευση του Ισλάμ.

Το περιεχόμενο της ομιλίας

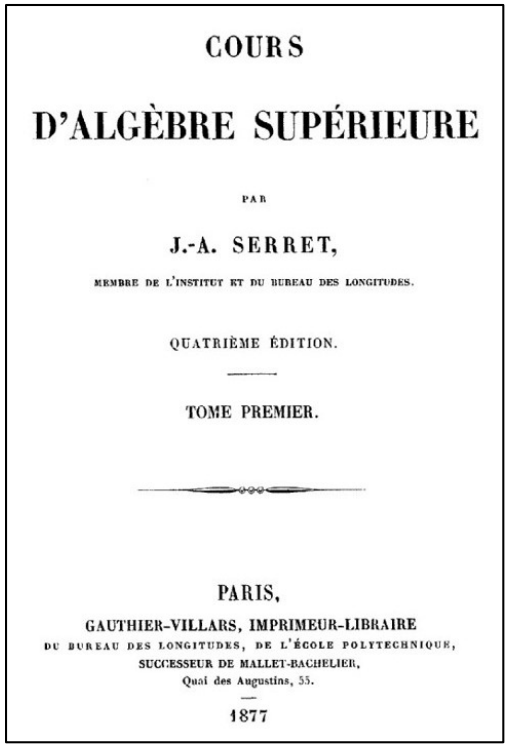
- *Κεντρικό θέμα*: Επανεξέταση της ιστοριογραφικής διαμάχης για τον χαρακτήρα του έργου του Διόφαντου. Αριθμητική; Άλγεβρα; ή Αλγεβρική Γεωμετρία;
- Επιχειρηματολογία υπέρ της άποψης ότι τα μαθηματικά που ασκούσε ο Διόφαντος εντάσσονται στην ιστορία της άλγεβρας (νοούμενης με την προ-μοντέρνα σημασία του όρου).
- *Κριτική της αλγεβρογεωμετρικής ερμηνείας*: Απόδειξη ότι η ανάγνωση του Διόφαντου μέσα από την οπτική της σύγχρονης αλγεβρικής γεωμετρίας είναι ανιστορική και δεν προσφέρει κανένα ερμηνευτικό πλεονέκτημα έναντι της ανάγνωσης με την προ-μοντέρνα άλγεβρα.
- *Η υπόθεση της μετάδοσης στο Ισλάμ*: Θα προταθεί, ως μια εύλογη εικασία, ότι η αραβική χριστιανική οικογένειας των Manṣūr (στην οποία ανήκε ο Ιωάννης Δαμασκηνός) αποτέλεσε μία πιθανή γέφυρα από την οποία η αλεξανδρινή άλγεβρα εισήλθε στον Ισλαμικό κόσμο.

Η ΤΡΙΜΕΡΗΣ ΠΕΡΙΟΔΟΛΟΓΗΣΗ ΤΗΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

3
Αφηρημένη



2
Μοντέρνα

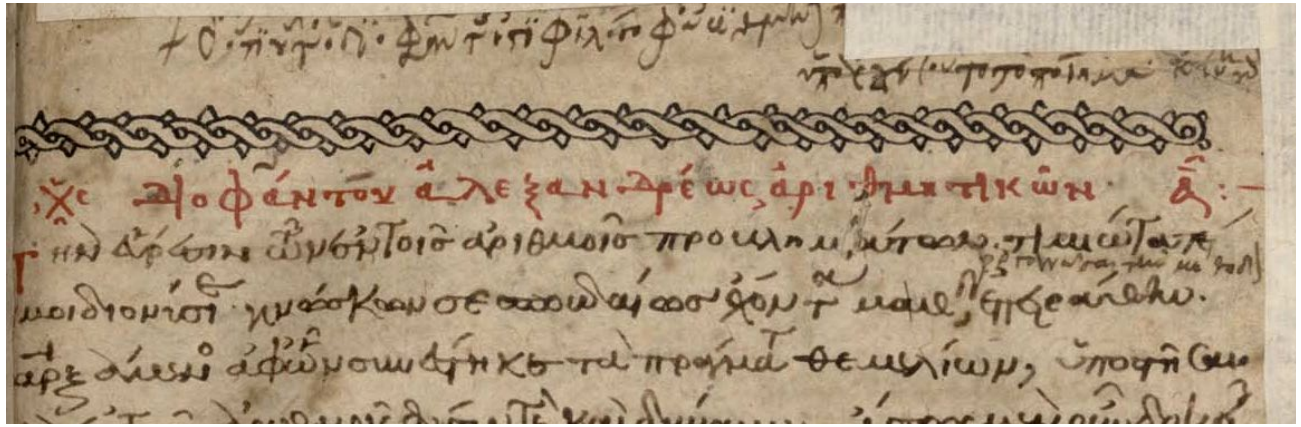


1
Προ-μοντέρνα



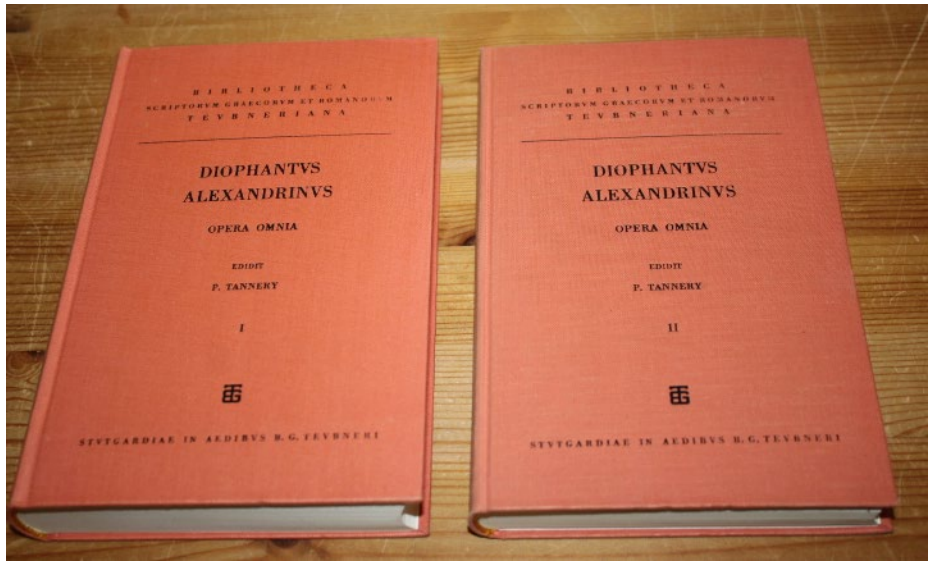


Οι βασικές εκδόσεις / μεταφράσεις του Διόφαντου

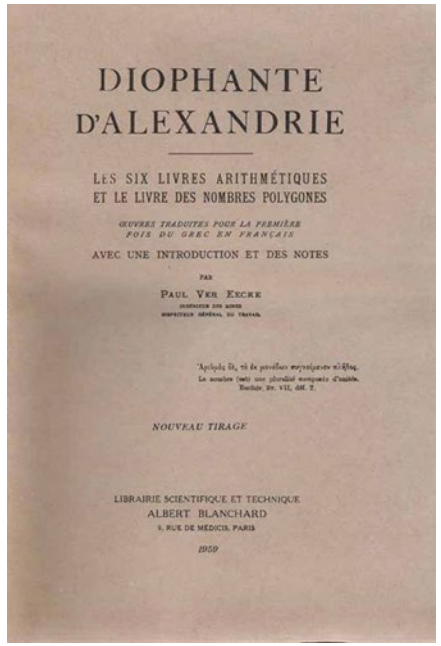


Matritensis 4678, φ. 58r, XI αιώνας (2ο μισό)
Η αρχή των *Αριθμητικών*

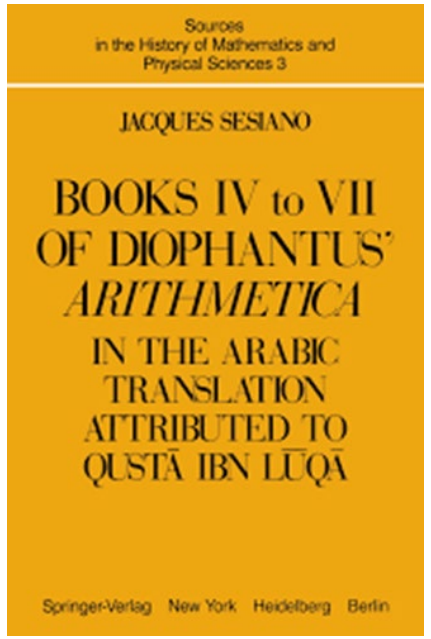
1893-95



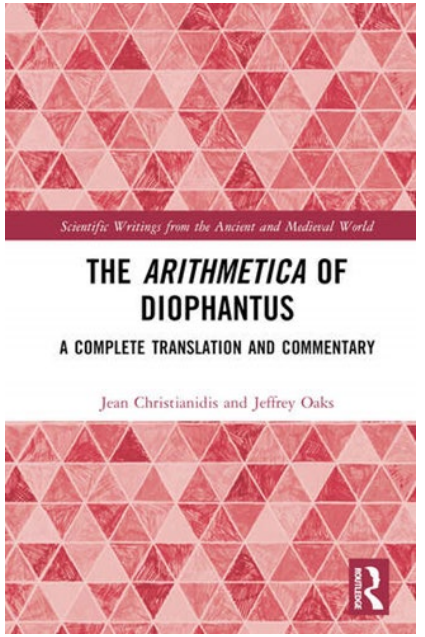
1926



1982



2023



Μια διαμάχη που έχει ανακύψει: Άλγεβρα ή Αριθμητική (Θεωρία Αριθμών);

DIOPHANTUS OF ALEXANDRIA

A STUDY IN THE HISTORY

OF

GREEK ALGEBRA

BY

SIR THOMAS L. HEATH, K.C.B.,

SC.D., SOMETIME FELLOW OF TRINITY COLLEGE, CAMBRIDGE

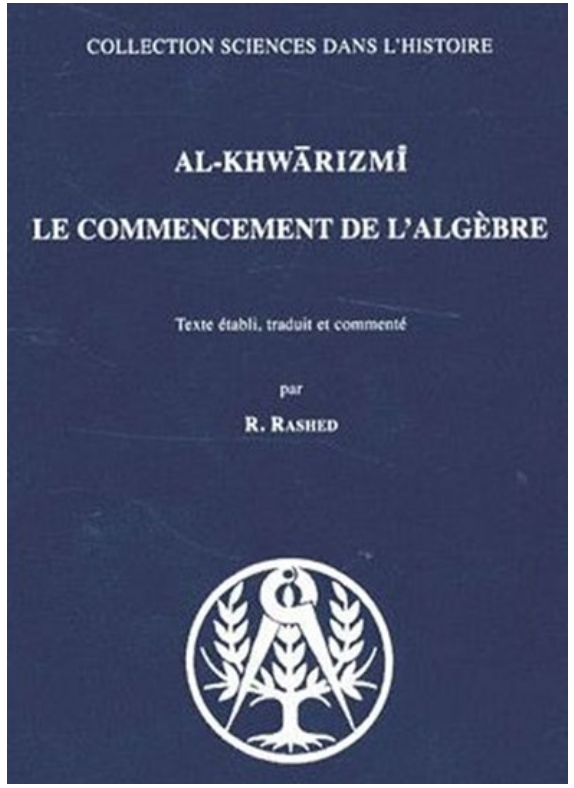
SECOND EDITION

WITH A SUPPLEMENT CONTAINING AN ACCOUNT OF FERMAT'S THEOREMS AND PROBLEMS CONNECTED WITH DIOPHANTINE ANALYSIS AND SOME SOLUTIONS OF DIOPHANTINE PROBLEMS BY EULER

Cambridge:
at the University Press
1910

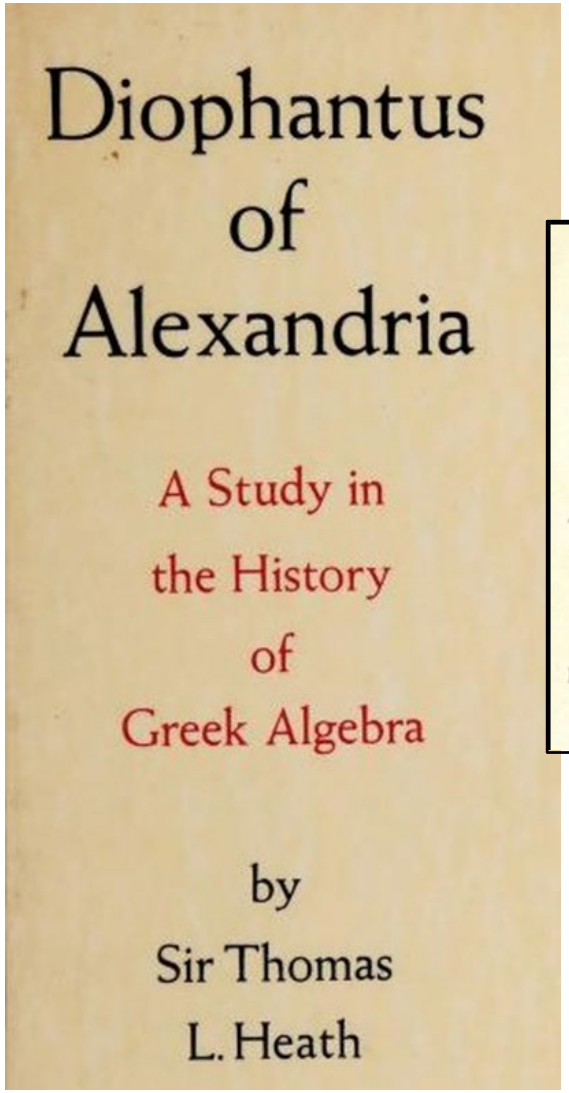


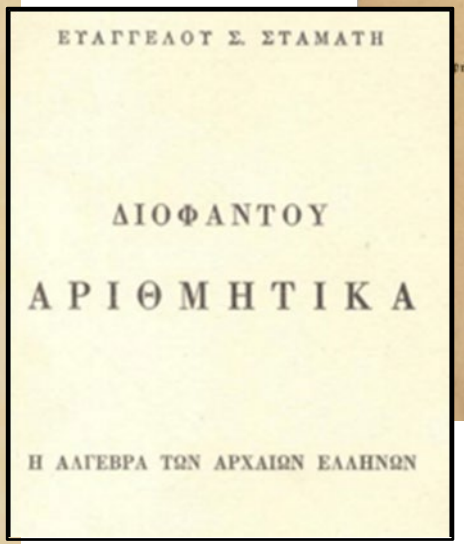


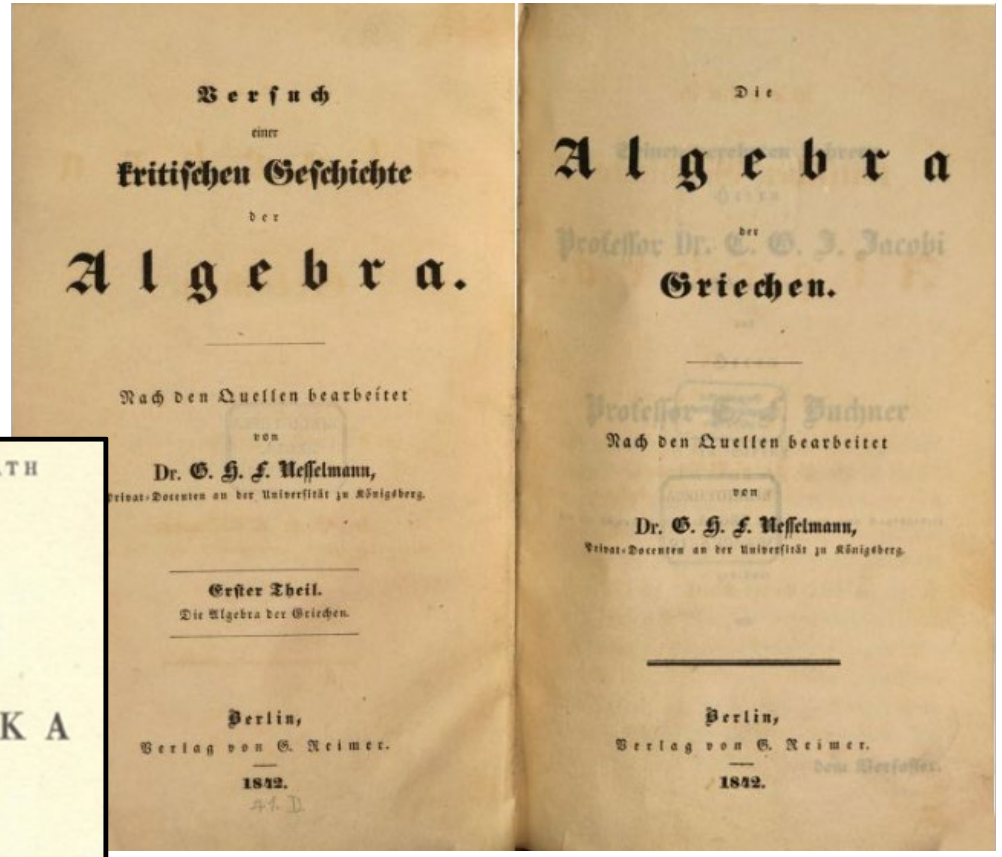


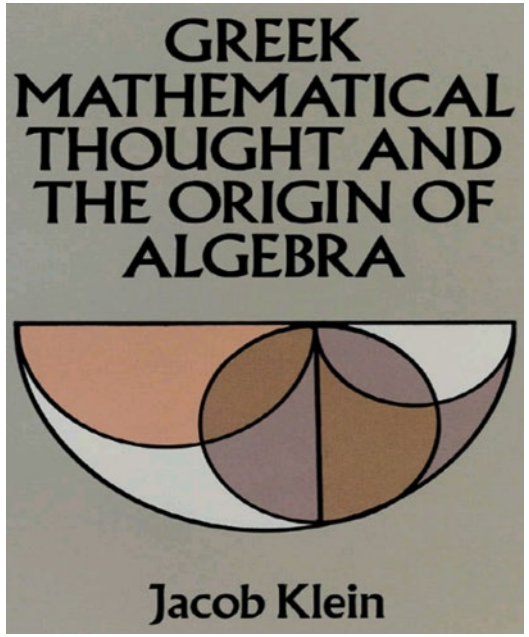
Au cours de ses solutions, Diophante procède par substitution, élimination et déplacement des espèces, c'est-à-dire avec des techniques que les algébristes manieront plus tard. Mais il est hors de doute que son livre est un livre d'arithmétique, dont le domaine est celui des rationnels positifs.

Η παλαιά άποψη









traitées. J'espère prouver dans ce mémoire les points suivants :

1° Que les Arabes connaissaient l'algèbre indéterminée;

2° Que leurs travaux sur ce sujet sont basés sur l'ouvrage de Diophante;

3° Qu'ils ont ajouté à l'algèbre de Diophante, tant en inventant de nouveaux procédés, qu'en se proposant des problèmes de degrés plus élevés;



Η λύση της διαμάχης:

- Μέχρι τον πρώιμο 17ο αι. ο Διόφαντος αναγνωριζόταν ως αλγεβριστής.
- Από τον 17ο αι. και μετά ο Διόφαντος θεωρείται ως αριθμοθεωρητικός.

Qustā ibn Lūqa (9ος αι.): «Τέλος του έβδομου Βιβλίου του έργου του Διόφαντου για την άλγεβρα, το οποίο αποτελείται από δεκαοκτώ προβλήματα».

Ibn al-Nadīm (10ος αι.): «Διόφαντος ο Αλεξανδρινός, ο Έλληνας. Μεταξύ των βιβλίων του περιέχεται (το) βιβλίο, *Η τέχνη της άλγεβρας*».

Ibn al-Nadīm (10ος αι.): Στο λήμμα για τον Abū l-Wafāʾ γράφει ότι έγραψε «Σχόλιο στο βιβλίο του Διόφαντου για την άλγεβρα».

Regiomontanus (15ος αι.): «Ο Διόφαντος, όμως, συνέγραψε δεκατρία απαράμιλλης εκλέπτυνσης βιβλία (τα οποία κανένας ως τώρα δεν έχει μεταφράσει στα λατινικά) στα οποία βρίσκεται ο αληθινός ανθός όλης της αριθμητικής, δηλαδή η τέχνη του rei & census, η οποία σήμερα ονομάζεται με το αραβικό της όνομα, άλγεβρα».

Bombelli (16ος αι.): «… αυτά τα τελευταία χρόνια, καθώς βρέθηκε στη βιβλιοθήκη του Κυρίου Μας στο Βατικανό ένα ελληνικό έργο αυτής της επιστήμης, το οποίο έχει γράψει κάποιος Διόφαντος, ένας Έλληνας συγγραφέας από την Αλεξάνδρεια …».

Από τον πρώιμο 17ο αιώνα και μετά:

- Η ανάδυση της Μοντέρνας Άλγεβρας καθιστά την Προ-μοντέρνα Άλγεβρα παρωχημένη.
- Ο αλγεβριστής Διόφαντος γίνεται αντικείμενο ιστορικού, και όχι τόσο μαθηματικού (αλγεβρικού) ενδιαφέροντος.
- Γεννιέται η μοντέρνα Αριθμοθεωρία,
- και, μαζί με αυτή, **εφευρίσκεται ένας νέος «Διόφαντος»**, ο αριθμοθεωρητικός Διόφαντος.







Η άλγεβρα που ασκούνταν πριν τον 17ο αι. δεν ήταν ίδια με την άλγεβρα από τον 17ο αι. και έπειτα. Λειτουργούσε σε μια θεμελιωδώς διαφορετική εννοιολογική βάση σε σύγκριση με την άλγεβρα που εγκαινιάζεται με τον François Viète το 1591 και βρίσκει την πρώτη πλήρη της έκφραση στο βιβλίο *La Geometrie* του Descartes (1637).

Τεκμήρια αυτής της εννοιολογικής διαφοροποίησης παρέχουν οι τρόποι με τους οποίους οι αλγεβριστές προ του 1600 πραγματεύονταν τα προβλήματα: Δομούσαν τις λύσεις διαφορετικά, εξέφραζαν ορισμένες πράξεις με τρόπους που σήμερα δεν έχουν κανένα νόημα ή φαίνονται να συνυφαίνονται με τον σύγχρονο συμβολισμό, απέφευγαν να χρησιμοποιούν άρρητους συντελεστές, κ.λπ.

Αυτές οι ανωμαλίες μαρτυρούν έναν διαφορετικό τρόπο κατανόησης των θεμελιωδών εννοιών του **μονωνύμου**, του **πολυωνύμου**, και της **εξίσωσης**.

Αυτή την προ-Viète άλγεβρα την ονομάζουμε «**Προ-μοντέρνα Άλγεβρα**» για να τη διακρίνουμε από τη στοιχειώδη «**Μοντέρνα Άλγεβρα**».

Προ-μοντέρνο vs. Μοντέρνο
Μονώνυμο — Πολυώνυμο — Εξίσωση

Ας λάβουμε τρεις τυχαίους αριθμούς: 2 1 5

Με αυτούς τους αριθμούς μπορώ να παραγάγω έναν αριθμό άλλου τύπου: $2°$ $1'$ $5''$

Ή, μπορώ να παραγάγω ένα μοντέρνο τριώνυμο: $2x^2 + x + 5$

Ή, ένα προ-μοντέρνο Διοφαντικό πολυώνυμο: $\Delta^{\upsilon}\ \overline{\beta}$  $\overline{\alpha}$ $\overline{\varepsilon}$

Ή, ένα προ-μοντέρνο αραβικό πολυώνυμο: δύο *Μαλ* ένα Πράγμα πέντε ντιράμ

Ή, ένα πολυώνυμο του Bombelli: 2  p. 1 p. 5 ([p. = più (more)]

Ας εξετάσουμε λεπτομερώς και σε βάθος τις προηγούμενες εκφράσεις

2° 1′ 5″ διαβάζεται ως: 2 μοίρες 1 πρώτο (λεπτό) 5 δεύτερα

Εστιάζουμε στην αντίθεση ανάμεσα στον **πληθυντικό αριθμό** «μοίρες» και «δεύτερα» έναντι του **ενικού αριθμού** «πρώτο (λεπτό)»

Το ίδιο ισχύει για τα προαναφερθέντα, Διοφαντικό και αραβικό, πολυώνυμα

Διοφαντικό: δυνάμεις δύο ἀριθμὸς εἷς μονάδες πέντε

Αραβικό: two *Māls* ένα Πράγμα five dirhams

Αντίθετα, δεν υπάρχει πληθυντικός αριθμός στο μοντέρνο πολυώνυμο:
Το διαβάζουμε (στα αγγλικά) ως: two ex squared (όχι 2 ex squares) plus one ex plus five
ή, καλύτερα, χωρίς το «one»: two ex squared plus ex plus five

Επίσης, το «plus» (συν) δεν χρησιμοποιείται ούτε στον αριθμό 2° 1′ 5″ ούτε στα προ-μοντέρνα πολυώνυμα

Συμμιγείς αριθμοί, προ-μοντέρνα πολυώνυμα, μοντέρνα πολυώνυμα
Ομοιότητες και διαφορές

	Συμμιγείς αριθμοί	Προ-μοντέρνο πολυώνυμο	Μοντέρνο πολυώνυμο
Ενικός/πληθυντικός αριθμός	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ
Πτώση (ονομαστική, γενική κ.λπ.)	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ
Γένος (αρσενικό, θηλυκό, ουδέτερο)	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ
Ο «συντελεστής» 1	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ

Γένος:
ἡ μοῖρα (θηλυκό)
ἡ δύναμις (θηλυκό)
ὁ κύβος (αρσενικό)
ὁ ἀριθμός (αρσενικό)

Ο «συντελεστής» 1:
Στον συμμιγή αριθμό ($2^\circ\ 1'\ 5''$): υποχρεωτικός
Στο προ-μοντέρνο πολυώνυμο ($\Delta^{\Upsilon}\ \overline{\beta}\ \text{ﬧ}\ \overline{\alpha}\ \text{ﬨ}\ \overline{\varepsilon}$): υποχρεωτικός
Στο μοντέρνο πολυώνυμο ($2x^2 + x + 5$): δεν γράφεται ποτέ

Συμμιγείς αριθμοί, προ-μοντέρνα πολυώνυμα, μοντέρνα πολυώνυμα
Ομοιότητες και διαφορές (συνέχεια)

+ / − (δηλ. πράξεις):

Στον συμμιγή αριθμό ΟΧΙ: $2° \; 1' \; 5''$ δεν σημαίνει $2° + 1' + 5''$

Στο προ-μοντέρνο πολυώνυμο ΟΧΙ: «δύο *Μαλ*, ένα Πράγμα, πέντε ντιράμ» είναι ελεύθερο πράξεων

Στο μοντέρνο πολυώνυμο ΝΑΙ: Στο πολυώνυμο $2x^2 + x + 5$ υπάρχουν δύο προσθέσεις και ένας (βαθμωτός) πολλαπλασιασμός.

	Συμμιγείς αριθμοί	Προ-μοντέρνο πολυώνυμο	Μοντέρνο πολυώνυμο
Γραμματικός αριθμός (ενικός, πληθ.)	YES	YES	NO
Πτώση (ονομαστική, γενική κ.λπ.)	YES	YES	NO
Γένος (αρσενικό, θηλυκό, ουδέτερο)	YES	YES	NO
Ο «συντελεστής» 1	YES	YES	NO
+ / −	NO	NO	YES
Πράξεις	NO	NO	YES

- Έννοιες-κλειδιά του προ-μοντέρνου αριθμού: (1) τον χαρακτηρίζει **πολλαπλότητα**· (2) συνδέεται με το **είδος** του οποίου είναι αριθμός· (3) εκφράζεται συχνά ως **συλλογή** ή **διαφορά** δύο ή περισσότερων αριθμών.
- Το προ-μοντέρνο μονώνυμο, π.χ. το «3 δυνάμεις», ή «5 *μαλ*», είναι ένα **ζεύγος αριθμού-και-είδους**.
- Ο πληθυντικός «δυνάμεις», «*μαλ* (*māls)*», αποδεικνύει ότι **δεν υπάρχει πολλαπλασιασμός**.
- Κατόπιν αυτών, βλέπουμε αμέσως γιατί **ο αριθμός 1** (π.χ. «1 δύναμις») **πρέπει να γράφεται**.
- Στο μοντέρνο μονώνυμο $3x^2$, το x^2 είναι μια **ποσότητα**, μια **τιμή**· εξ ου ο πολλαπλασιασμός μεταξύ 3 και x^2. Αντίθετα, στο αντίστοιχο προ-μοντέρνο μονώνυμο —«3 δυνάμεις» ή «3 *māls*»— οι λέξεις «δυνάμεις» και «*māls*» δηλώνουν **είδη**, όχι τιμές· επομένως, το προ-μοντέρνο μονώνυμο δεν περιέχει πολλαπλασιασμό.
- Το προ-μοντέρνο Διοφαντικό πολυώνυμο «δυνάμεις $\overline{\beta}$, ἀριθμὸς $\overline{\alpha}$, μονάδες $\overline{\varepsilon}$» είναι μια **συνάθροιση**, μια **συλλογή** από 8 items που ανήκουν σε τρία διαφορετικά **είδη**: «δυνάμεις», «ἀριθμοί» (το είδος του πρωτοβάθμιου αλγεβρικού αγνώστου), και «μονάδες». Αντίθετα, το μοντέρνο πολυώνυμο $2x^2 + x + 5$ είναι ένας **γραμμικός συνδυασμός ποσοτήτων** (τιμών)· περιέχει πράξεις.
- Το προ-μοντέρνο Διοφαντικό αντίστοιχο του μοντέρνου πολυωνύμου $2x - 3$ είναι «ἀριθμοὶ $\overline{\beta}$ λείψει μονάδων $\overline{\gamma}$». Η λέξη «λείψει» —επιρρηματική μορφή που προκύπτει από το ουσιαστικό «λεῖψις»— δεν πρέπει να κατανοείται σαν το μοντέρνο σύμβολο «πλην» (−). Η όλη φράση δηλώνει ένα μη πλήρες «2 ἀριθμοί», όπως ακριβώς όταν λέμε «2 (ώρες) παρά 10 λεπτά».

Δύο επιπλέον διευκρινίσεις

1. Αριθμός/τιμή/ποσότητα vs. είδος

   Η λέξη «ευρώ» δηλώνει είδος νομίσματος (χωρίς τιμή)
   Η έκφραση «1 ευρώ» δηλώνει τιμή/ποσότητα

   Ομοίως, η λέξη «ἀριθμός» δηλώνει αριθμητικό είδος
   Η έκφραση «1 ἀριθμός» δηλώνει αριθμό/τιμή/ποσότητα

2. Το διπλό νόημα της λέξης «ἀριθμός»

Ως απλό ουσιαστικό ή ως Κύριο όνομα (που δηλώνει το όνομα του είδους του πρωτοβάθμιου αλγεβρικού αγνώστου)

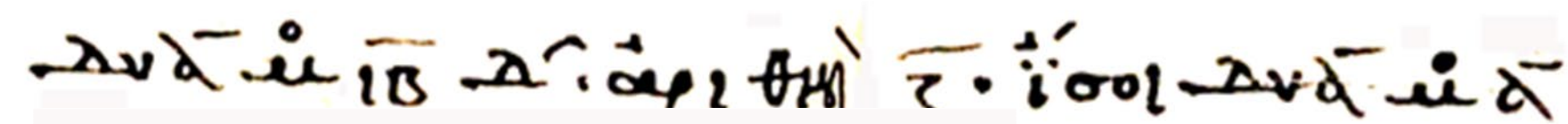
Παράδειγμα (Δ.39):
πλάσσω ἀριθμοὺς δύο ἵνα ὁ ὑπ’ αὐτῶν ᾖ ἀριθμοὶ $\bar{\beta}$
σχηματίζω δύο αριθμούς έτσι ώστε το γινόμενό τους να είναι 2 Αριθμοί

city: ουσιαστικό
City (η περιοχή του Λονδίνου): Κύριο όνομα

Τα ονόματα των δυνάμεων / Αλγεβρικοί όροι στην προ-μοντέρνα άλγεβρα

Ελληνικά	Αραβικά	Ιταλικά	Μοντέρνα
μονάς	μονάδα / ντιράμ	numero / dragma	1
ἀριθμός	πράγμα / ρίζα	cosa	x
δύναμις	*μαλ*	censo	x^2
κύβος	κύβος	cubo	x^3
δυναμοδύναμις	*Μαλ-μάλ*	censo di censo	x^4
…	…	…	…

Matrit. 4678 (f. 123v)



Tannery



Modern

$$x^2 + 12\frac{1}{4} - 7x = x^2 + 1$$

Η αλγεβρική επίλυση προβλήματος:
Η δομή της επίλυσης προβλήματος στην προ-μοντέρνα άλγεβρα

Η επίλυση ενός προβλήματος με προ-μοντέρνα άλγεβρα περιλαμβάνει τα ακόλουθα στάδια:

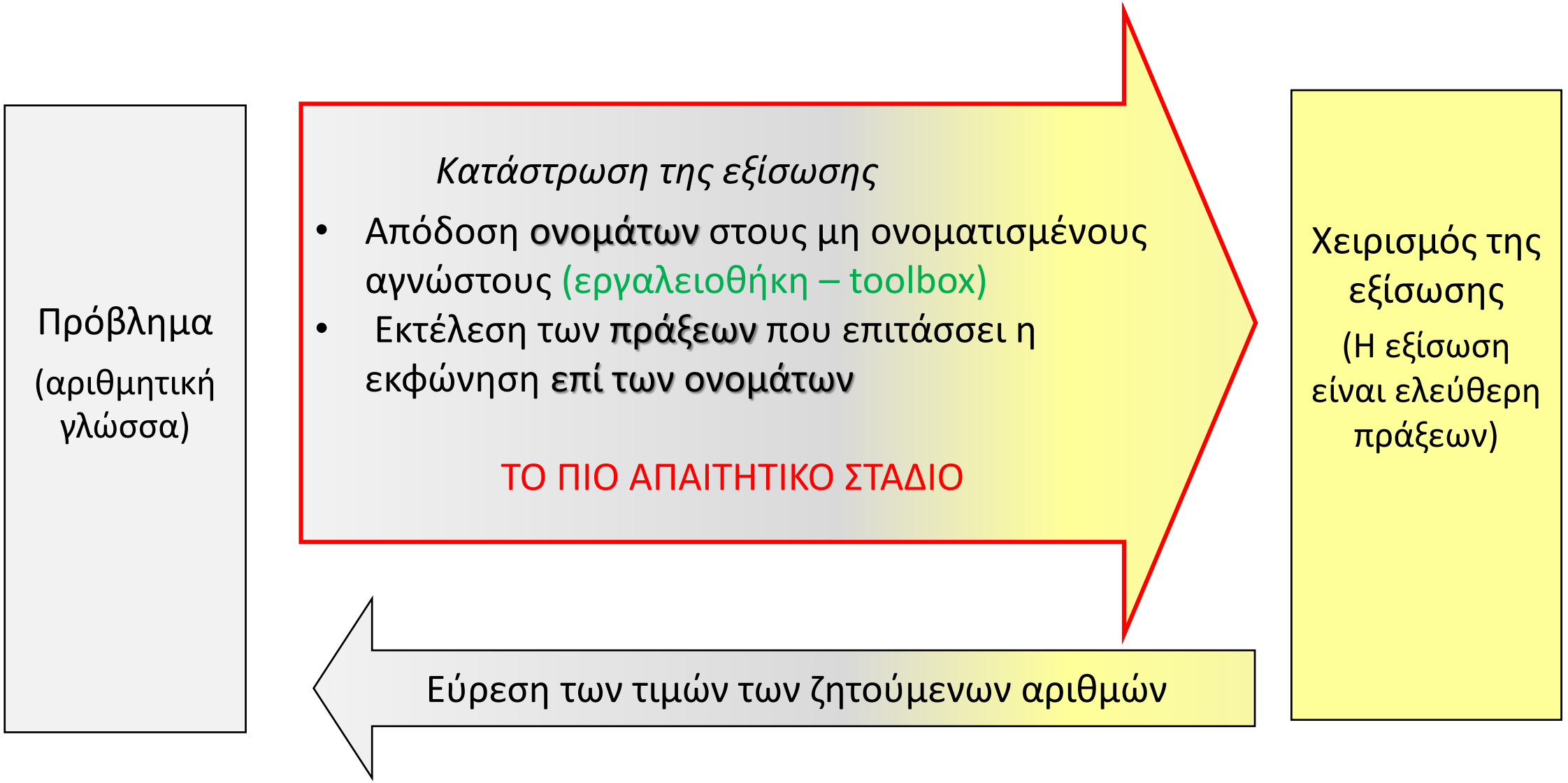
(1) Ένας ή περισσότεροι άγνωστοι **ονοματίζονται** (από μια προκαθορισμένη λίστα ονομάτων των δυνάμεων), **και οι πράξεις που επιτάσσει η εκφώνηση εκτελούνται επί των ονομάτων** ώστε να σχηματιστεί μια πολυωνυμική εξίσωση.

(2) Κατόπιν, η εξίσωση **απλοποιείται**. Στην προ-μοντέρνα άλγεβρα μια εξίσωση θεωρείται ότι έχει απλοποιηθεί όταν (α) δεν περιέχει όρους που λείπουν και (β) περιέχει το πολύ έναν όρο από κάθε δύναμη. Έτσι, η απλοποίηση περιλαμβάνει δύο βασικά βήματα: (α) Οι όροι της μορφής «Α με έλλειψη Β» πρέπει **να αποκατασταθούν ώστε να γίνουν πλήρη Α** (al-jabr) και συγχρόνως το Β πρέπει να προστεθεί στο άλλο μέλος της εξίσωσης· και (β) οι όμοιοι όροι στα δύο μέλη της εξίσωσης πρέπει να **αντιπαραβληθούν**, ώστε να απομείνει η διαφορά τους στο μέλος όπου βρίσκεται ο μεγαλύτερος όρος (al-muqābala).

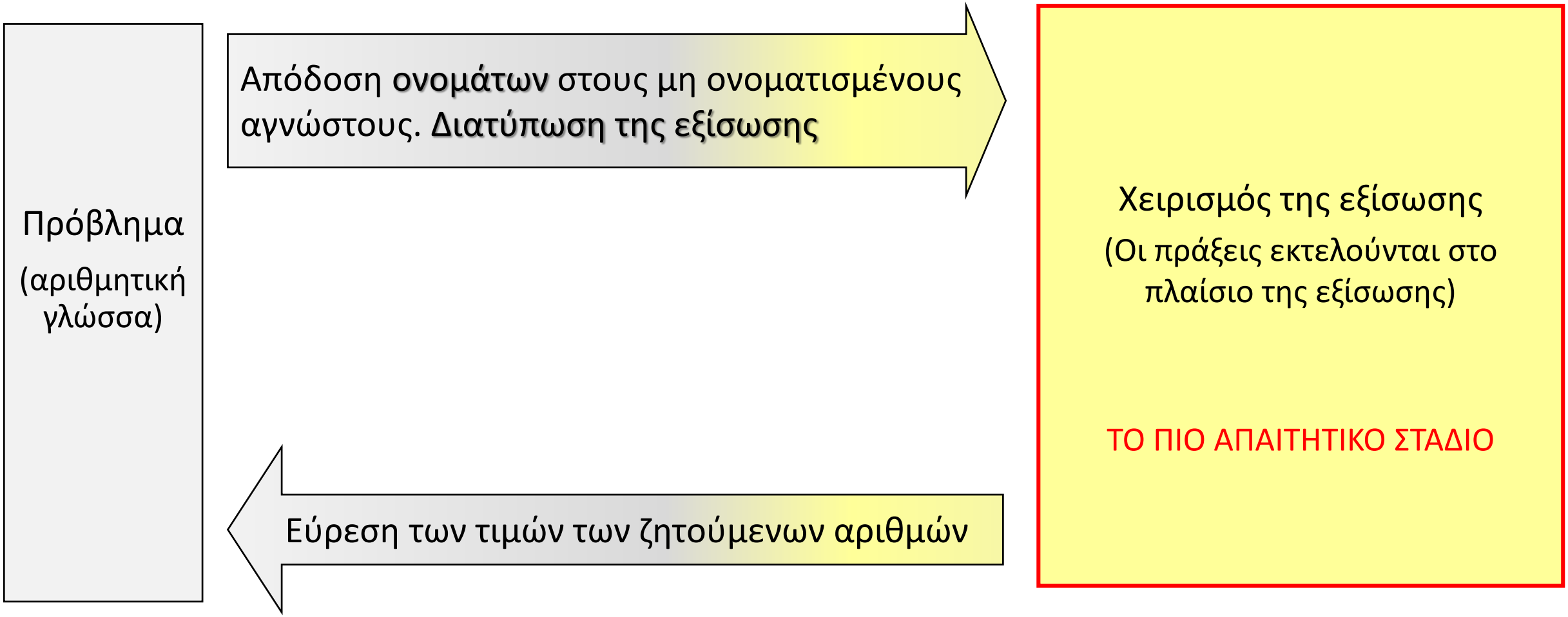
(3) Κατόπιν επιλύεται η απλοποιημένη εξίσωση, με τη χρήση ενός έτοιμου εκ των προτέρων κανόνα.

(4) Αφού βρεθεί η τιμή του αλγεβρικού αγνώστου, υπολογίζονται οι άγνωστοι αριθμοί του προβλήματος.

Η ΔΟΜΗ ΤΗΣ ΠΡΟ-ΜΟΝΤΕΡΝΑΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ



Η ΔΟΜΗ ΤΗΣ ΜΟΝΤΕΡΝΑΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ



Ο Νεύτων για τη (μοντέρνα) αλγεβρική επίλυση

How a Question may be brought to an Æquation.

AFTER the Learner has been ſome Time exerciſed in managing and transforming Æquations, Order requires that he ſhould try his Skill in bringing Queſtions to an Æquation. And any Queſtion being propoſed, his Skill is particularly required to denote all its Conditions by ſo many Æquations. To do which, he muſt firſt conſider whether the Propoſitions or Sentences in which it is expreſs'd, be all of them fit to be denoted in Algebraick Terms, juſt as we expreſs our Conceptions in *Latin* or *Greek* Characters. And if ſo, (as will happen in Queſtions converſant about Numbers or abſtract Quantities) then let him give Names to both known and unknown Quantities, as far as Occaſion requires. And the Conditions thus tranſlated to Algebraick Terms will give as many Æquations as are neceſſary to ſolve it.

As if there are required three Numbers in continual Proportion whoſe Sum is 20, and the Sum of their Squares 140; putting x, y, and z for the Names of the three Numbers ſought, the Queſtion will be tranſlated out of the Verbal to the Symbolical Expreſſion, as follows:

K 2 The

Αποσπάσματα από το κείμενο του Διόφαντου

Αποτελεί, λοιπόν, εδραιωμένη άποψη ότι καθένας από αυτούς τους αριθμούς, αν αποκτήσει μια **συντομότερη ονομασία** (**συντομωτέραν ἐπωνυμίαν**), γίνεται στοιχείο της αριθμητικής θεωρίας …

Και όπως ακριβώς τα ομώνυμα μέρη των αριθμών ονομάζονται ώστε να μοιάζουν με τους αριθμούς … έτσι και τα ομώνυμα μέρη των αριθμών τις **ονομασίες των οποίων μόλις δώσαμε** (**ἐπονομασθέντων ἀριθμῶν**), θα καλούνται και (πάλι) ώστε να μοιάζουν με τους αριθμούς …

Αφού λοιπόν σου εξέθεσα την **ονομασία** (**ἐπωνυμίαν**) καθενός από τους αριθμούς, θα προχωρήσω στους πολλαπλασιασμούς τους. Θα τους βρεις τελείως προφανείς, διότι δηλώνονται σχεδόν αμέσως από τα **ονόματα** (**ὀνομασίας**) …

Οι βασικές τεχνικές του Διόφαντου για την απόδοση ονομάτων στους αγνώστους

- Άμεσος ονοματισμός
- Παράγωγος (ή εξαρτημένος) ονοματισμός
- Ονοματισμός ενός συνδυασμού των αγνώστων
- Ονοματισμός με ‘εξομοίωση’ (της συνθήκης ενός προβλήματος με μια γνωστή και δομικά όμοια αριθμητική ταυτότητα)
- Ονοματισμός με al-istiqrāʾ

Π.χ.: Να διαιρεθεί ένας προτεινόμενος αριθμός σε δύο αριθμούς που έχουν δεδομένη διαφορά. Έστω, λοιπόν, ότι ο δεδομένος αριθμός είναι ο 100 και η διαφορά 40 μονάδες. Να βρεθούν οι αριθμοί.

Έστω ότι ο μικρότερος έχει οριστεί να είναι 1 Αριθμός. Άρα ο μεγαλύτερος θα είναι 1 Αριθμός, 40 μονάδες.

Π.χ.: Να βρεθούν δύο αριθμοί ώστε ο τετράγωνος καθενός από τους δύο, αν προσλάβει τον άλλο, να σχηματίζει τετράγωνο.

Έστω ότι ο πρώτος έχει οριστεί να είναι 1 Αριθμός και ο δεύτερος 1 μονάδα, 2 Αριθμοί, προκειμένου ο τετράγωνος του πρώτου, αν προσλάβει τον δεύτερο, να σχηματίζει τετράγωνο.

$$\begin{cases} (1\text{ος στο τετρ.}) + (2\text{ο}) = \square \\ (2\text{ος στο τετρ.}) + (1\text{ο}) = \square' \end{cases}$$

εξομοιωτής

$$m^2 + (1 + 2m) = (m + 1)^2$$

Ονοματισμός με al-istiqrāʾ

Π.χ.: Να βρεθούν δύο αριθμοί ώστε ο τετράγωνος καθενός από τους δύο, αν προσλάβει τον άλλο, να σχηματίζει τετράγωνο.

Έστω ότι ο πρώτος έχει οριστεί να είναι **1 Αριθμός** και ο δεύτερος **1 μονάδα, 2 Αριθμοί**, προκειμένου ο τετράγωνος του πρώτου, αν προσλάβει τον δεύτερο, να σχηματίζει τετράγωνο. Απομένει και ο τετράγωνος του δεύτερου, αν προσλάβει τον πρώτο, να σχηματίζει τετράγωνο. Αλλά ο τετράγωνος του δεύτερου, όταν προσλάβει τον πρώτο, γίνεται 4 Δυνάμεις, 5 Αριθμοί, 1 μονάδα. Αυτά είναι ίσα προς έναν τετράγωνο. **Σχηματίζω τον τετράγωνο από (πλευράς) 2 Αριθμών με έλλειψη 2 μονάδων**.

$$\begin{cases} (1\text{ος στο τετρ.}) + (2\text{ο}) = \square \\ (2\text{ος στο τετρ.}) + (1\text{ο}) = \square' \end{cases}$$

Ονόματα	Πράξεις με τα ονόματα	Εξίσωση
$1\text{ος} \coloneqq 1\text{A}$		
$2\text{ος} \coloneqq 1\mu\ 2\text{A}$		
	$\text{Τετρ. } 1\mu\ 2\text{A} \rightarrow 4\Delta\ 4\text{A}\ 1\mu$	
	$\text{Προσθέτω } 1\text{A} \rightarrow 4\Delta\ 5\text{A}\ 1\mu$	
		$4\Delta\ 5\text{A}\ 1\mu = \square'$
$\sqrt{\square'} \coloneqq 2\text{A}\ \lambda\ 2\mu$		
	$\text{Τετρ. } 2\text{A}\ \lambda\ 2\mu \rightarrow 4\Delta\ 4\mu\ \lambda\ 8\text{A}$	
		$4\Delta\ 5\text{A}\ 1\mu = 4\Delta\ 4\mu\ \lambda\ 8\text{A}$

Διόφαντος, Πρόβλημα Β.9	Abū Kāmil, Πρόβλημα ⟨12⟩, πρώτη λύση
Ένας δεδομένος αριθμός, ο οποίος απαρτίζεται από δύο τετραγώνους, να διαιρεθεί εκ νέου σε δύο άλλους τετραγώνους. Έστω (ότι έχει προταθεί) να διαιρέσουμε εκ νέου τον 13, ο οποίος απαρτίζεται από τους τετραγώνους 4 και 9, σε δύο άλλους τετραγώνους.	Γνωρίζεις ότι κάθε αριθμό ο οποίος διαιρείται σε δύο μέρη ώστε το κάθε μέρος να έχει ρίζα, μπορείς να τον διαιρέσεις σε δύο άλλα μέρη ώστε το κάθε μέρος να έχει ρίζα, και σε δύο άλλα μέρη χωρίς τελειωμό. Θα σου το εξηγήσω για να το καταλάβεις, Θεού θέλοντος. Αν κάποιος σου πει, πέντε ντιράμ: το διαιρείς σε δύο μέρη ώστε το κάθε μέρος να έχει ρίζα. Ξέρεις ότι το ένα μέρος είναι τέσσερα και το άλλο είναι ένα.
Ας ληφθούν οι πλευρές των προαναφερθέντων τετραγώνων, 2 μονάδες και 3 μονάδες, και ας οριστούν οι πλευρές των ζητούμενων τετραγώνων να είναι 1 Αριθμός, 2 μονάδες, η μία και οσοιδήποτε Αριθμοί με έλλειψη την πλευρά του άλλου, η άλλη· έστω ότι είναι 2 Αριθμοί με έλλειψη 3 μονάδων. Και οι τετράγωνοι γίνονται **1 Δύναμη, 4 Αριθμοί, 4 μονάδες** ο ένας, **4 Δυνάμεις, 9 μονάδες με έλλειψη 12 Αριθμών** ο άλλος. Απομένει, αν προστεθούν οι δύο, να γίνονται 13 μονάδες. Αλλά όταν προστεθούν οι δύο γίνονται **5 Δυνάμεις, 13 μονάδες με έλλειψη 8 Αριθμών. Αυτά είναι ίσα προς 13 μονάδες**,	Αν, λοιπόν, θέλεις να το διαιρέσεις σε δύο άλλα μέρη, διαφορετικά από αυτά τα δύο μέρη, ώστε το κάθε μέρος να έχει ρίζα, πάρε τη ρίζα του ενός από τα μέρη, πρόσθεσε σε αυτή ένα πράγμα, και πολλαπλασίασέ το με τον εαυτό του. Αυτό που προκύπτει είναι ένα από τα μέρη. Αφαίρεσέ το από το πέντε· αυτό που απομένει είναι το άλλο μέρος. Σε αυτή την περίπτωση παίρνουμε το ένα από τα δύο μέρη, που είναι ένα, παίρνουμε τη ρίζα του, που είναι ένα, και προσθέτουμε σε αυτή ένα πράγμα οπότε γίνεται **ένα και ένα πράγμα**. Το πολλαπλασιάζουμε με τον εαυτό του για να λάβουμε ένα *μαλ* και ένα ντιράμ και δύο πράγματα, που είναι το ένα από τα δύο μέρη που ζητάμε. Το αφαιρούμε από το πέντε· απομένουν τέσσερα ντιράμ με έλλειψη ενός *μαλ* και με έλλειψη δύο πραγμάτων, που είναι το άλλο μέρος, και πρέπει αυτό να έχει ρίζα. Ξέρουμε ότι η ρίζα του είναι μικρότερη από δύο ντιράμ, οπότε **την κάνουμε δύο ντιράμ με έλλειψη ενός πράγματος και ενός τρίτου** και το πολλαπλασιάζουμε με τον εαυτό του για να λάβουμε: **τέσσερα ντιράμ και ένα *μαλ* και επτά ένατα του *μαλ* με έλλειψη πέντε πραγμάτων και ενός τρίτου του πράγματος ίσα προς τέσσερα ντιράμ με έλλειψη ενός *μαλ* και με έλλειψη δύο πραγμάτων**.

οπότε ο Αριθμός γίνεται 8 5α.	Αντιπαράβαλέ τα όπως σου έχω εξηγήσει, για να λάβεις: το πράγμα είναι ένα ντιράμ και ένα πέμπτο.
Στις υποστάσεις: όρισα την πλευρά του πρώτου να είναι 1 Αριθμός, 2 μονάδες· θα είναι 18 5α· και την πλευρά του δεύτερου να είναι 2 Αριθμοί με έλλειψη 3 μονάδων· θα είναι 1 (5ο). Και οι ίδιοι οι τετράγωνοι θα είναι 324 25α ο ένας, 1 (25ο) ο άλλος. Και αθροιζόμενοι οι δύο γίνονται 325 25α, τα οποία συμποσούνται στις 13 μονάδες που έχουν προταθεί.	Κάναμε τη ρίζα του ενός από τα μέρη ένα πράγμα και ένα ντιράμ, οπότε η ρίζα του ενός από τα μέρη γίνεται δύο ντιράμ και ένα πέμπτο. Το πολλαπλασιάζουμε με τον εαυτό του για να λάβουμε τέσσερα ντιράμ και τέσσερα πέμπτα και ένα πέμπτο του ενός πέμπτου, που είναι το ένα από τα μέρη που αναζητούσαμε, ενώ το άλλο είναι ό,τι απομένει από το πέντε, που είναι τέσσερα πέμπτα του ενός πέμπτου.

Διόφαντος, Πρόβλημα Β.9

$13 = 4 + 9 = \square + \square'$

Ονόματα	Πράξεις	Εξίσωση
$\sqrt{\square} \coloneqq 1\text{N}\ 2\mu$ $\sqrt{\square'} \coloneqq 2\text{N}\ \lambda\ 3\mu$	 Τετρ. $1\text{N}\ 2\mu \longrightarrow 1\Delta\ 4\text{N}\ 4\mu$ Τετρ. $1\text{N}\ \lambda\ 3\mu \longrightarrow 4\Delta\ 9\mu\ \lambda\ 12\text{A}$ Το προσθ. Στο $1\Delta\ 4\text{A}\ 4\mu \longrightarrow 5\Delta\ 13\mu\ \lambda\ 8\text{A}$	 $5\Delta\ 13\mu\ \lambda\ 8\text{A} = 13\mu$

Abū Kāmil, Πρόβλημα ⟨12⟩

$5 = 4 + 1 = \square + \square'$

Ονόματα	Πράξεις	Εξίσωση
$\sqrt{\square} \coloneqq 1\text{ντ}\ 1\Pi$	 Τετρ. $1\text{ντ}\ 1\Pi \longrightarrow 1\text{M}\ 1\text{ντ}\ 2\Pi$ Αφαιρώ $1\text{M}\ 1\text{ντ}\ 2\Pi$ από $5\text{ντ} \longrightarrow$ $4\text{ντ}\ \lambda\ 1\text{M}\ \lambda\ 2\Pi$	 $4\text{ντ}\ \lambda\ 1\text{M}\ \lambda\ 2\Pi = \square'$
$\sqrt{\square'} \coloneqq 2\text{ντ}\ \lambda\ 1\frac{1}{3}\Pi$	 Τετρ. $2\text{ντ}\ \lambda\ 1\frac{1}{3}\Pi \longrightarrow$ $4\text{ντ}\ 1\frac{7}{9}\text{M}\ \lambda\ 5\frac{1}{3}\Pi$	 $4\text{ντ}\ \lambda\ 1\text{M}\ \lambda\ 2\Pi =$ $4\text{ντ}\ 1\frac{7}{9}\text{M}\ \lambda\ 5\frac{1}{3}\Pi$

Η ερμηνεία δια της αλγεβρικής γεωμετρίας

Abū Kāmil, Πρόβλημα ⟨12⟩, πρώτη λύση)

Γνωρίζεις ότι κάθε αριθμό ο οποίος διαιρείται σε δύο μέρη ώστε το κάθε μέρος να έχει ρίζα, μπορείς να τον διαιρέσεις σε δύο άλλα μέρη ώστε το κάθε μέρος να έχει ρίζα, και σε δύο άλλα μέρη χωρίς τελειωμό. Θα σου το εξηγήσω για να το καταλάβεις, Θεού θέλοντος. Αν κάποιος σου πει, πέντε ντιράμ: το διαιρείς σε δύο μέρη ώστε το κάθε μέρος να έχει ρίζα. Ξέρεις ότι το ένα μέρος είναι τέσσερα και το άλλο είναι ένα. Αν, λοιπόν, θέλεις να το διαιρέσεις σε δύο άλλα μέρη, διαφορετικά από αυτά τα δύο μέρη, ώστε το κάθε μέρος να έχει ρίζα, πάρε τη ρίζα του ενός από τα μέρη, πρόσθεσε σε αυτή ένα πράγμα, και πολλαπλασίασέ το με τον εαυτό του. Αυτό που προκύπτει είναι ένα από τα μέρη. Αφαίρεσέ το από το πέντε· αυτό που απομένει είναι το άλλο μέρος. Σε αυτή την περίπτωση παίρνουμε το ένα από τα δύο μέρη, που είναι ένα, παίρνουμε τη ρίζα του, που είναι ένα, και προσθέτουμε σε αυτή ένα πράγμα οπότε γίνεται **ένα και ένα πράγμα**. Το πολλαπλασιάζουμε με τον εαυτό του για να λάβουμε ένα *μαλ* και ένα ντιράμ και δύο πράγματα, που είναι το ένα από τα δύο μέρη που ζητάμε. Το αφαιρούμε από το πέντε· **απομένουν τέσσερα ντιράμ με έλλειψη ενός *μαλ* και με έλλειψη δύο πραγμάτων, που είναι το άλλο μέρος, και πρέπει αυτό να έχει ρίζα**. Ξέρουμε ότι η ρίζα του είναι μικρότερη από δύο ντιράμ, οπότε την κάνουμε **δύο ντιράμ με έλλειψη ενός πράγματος και ενός τρίτου** και το πολλαπλασιάζουμε με τον εαυτό του για να λάβουμε: τέσσερα ντιράμ και ένα *μαλ* και επτά ένατα του *μαλ* με έλλειψη πέντε πραγμάτων και ενός τρίτου του πράγματος ίσα προς τέσσερα ντιράμ με έλλειψη ενός *μαλ* και με έλλειψη δύο πραγμάτων. Αντιπαράβαλέ τα όπως σου έχω εξηγήσει, για να λάβεις: το πράγμα είναι ένα ντιράμ και ένα πέμπτο. Κάναμε τη ρίζα του ενός από τα μέρη ένα πράγμα και ένα ντιράμ, οπότε η ρίζα του ενός από τα μέρη γίνεται δύο ντιράμ και ένα πέμπτο. Το πολλαπλασιάζουμε με τον εαυτό του για να λάβουμε τέσσερα ντιράμ και τέσσερα πέμπτα και ένα πέμπτο του ενός πέμπτου, που είναι το ένα από τα μέρη που αναζητούσαμε, ενώ το άλλο είναι ό,τι απομένει από το πέντε, που είναι τέσσερα πέμπτα του ενός πέμπτου.

Η ερμηνεία του Roshdi Rashed

Το πρόβλημα 12 ξαναγράφεται ως:

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2, \quad a, b \in \mathrm{Q}$$

Πρόκειται για το πρόβλημα II.9 των *Αριθμητικών* του Διόφαντου. Και εδώ ο Abū Kāmil εργάζεται με τη μέθοδο της χορδής. **Θέτει**

(*) $x = a + t$ και $y = b - ut$

και, **αντικαθιστώντας στην εξίσωση**, λαμβάνει

$$t = \frac{2(bu-a)}{u^2+1};$$

από όπου

$$x = \frac{a(u^2-1)+2bu}{u^2+1} \quad \text{et} \quad y = \frac{a(1-u^2)+2au}{u^2+1}.$$

Σημειώνουμε ότι **η εξίσωση του προβλήματος** ορίζει έναν κύκλο και το σημείο (a, b) είναι ένα ρητό σημείο του κύκλου. **Η ευθεία που ορίζεται από τις (*)** περνά από αυτό το σημείο και τέμνει τον κύκλο σε ένα άλλο ρητό σημείο.

Η ερμηνεία του Roshdi Rashed

Το πρόβλημα 12 ξαναγράφεται ως:

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2, \quad a, b \in \mathrm{Q}$$

Πρόκειται για το πρόβλημα II.9 των *Αριθμητικών* του Διόφαντου. Και εδώ ο Abū Kāmil εργάζεται με τη μέθοδο της χορδής. Θέτει

(*) $x = a + t$ και $y = b - ut$

και, αντικαθιστώντας στην εξίσωση, λαμβάνει

$$t = \frac{2(bu-a)}{u^2+1};$$

από όπου

$$x = \frac{a(u^2-1)+2bu}{u^2+1} \quad \text{et} \quad y = \frac{a(1-u^2)+2au}{u^2+1}.$$

Σημειώνουμε ότι η εξίσωση του προβλήματος ορίζει έναν κύκλο και το σημείο (a, b) είναι ένα ρητό σημείο του κύκλου. Η ευθεία που ορίζεται από τις (*) περνά από αυτό το σημείο και τέμνει τον κύκλο σε ένα άλλο ρητό σημείο.

Abū Kāmil, Πρόβλημα ⟨12⟩

$5 = 4 + 1 = \square + \square'$

Ονόματα	Πράξεις	Εξίσωση
$\sqrt{\square} \coloneqq$ 1ντ 1Π	Τετρ. 1ντ 1Π ⟶ 1Μ 1ντ 2Π Αφαιρώ 1Μ 1ντ 2Π από 5ντ ⟶ 4ντ λ 1Μ λ 2Π	4ντ λ 1Μ λ 2Π = $\square'$
$\sqrt{\square'} \coloneqq$ 2ντ λ $1\frac{1}{3}$Π	Τετρ. 2ντ λ $1\frac{1}{3}$Π ⟶ 4ντ $1\frac{7}{9}$Μ λ $5\frac{1}{3}$Π	4ντ λ 1Μ λ 2Π = 4ντ $1\frac{7}{9}$Μ λ $5\frac{1}{3}$Π

Μετά την πρώτη "position" ($x = a + t$) και πριν την επόμενη "position" ($y = b - ut$) ο Abū Kāmil:

- Κάνει έναν τετραγωνισμό (πράξη)
- Κάνει μια αφαίρεση (πράξη)
- Διατυπώνει μια ημιτελή εξίσωση

και μόνο τότε προχωρά στη δεύτερη "position".

ΠΕΡΙ ΜΕΘΟΔΟΥ

αποκλίνουσες ερμηνείες όρων

Προ-μοντέρνα άλγεβρα	Αλγεβρική γεωμετρία
Πρόβλημα	Εξίσωση μιας καμπύλης
Απόδοση ονόματος	Αντικατάσταση / Αλλαγή μεταβλητής
Εξίσωση	Επιλύουσα εξίσωση
Λύση του προβλήματος	Ρητό σημείο της καμπύλης

Η αρχή της παρανόησης γύρω από την έννοια της μεθόδου



Hermann Hakel (1874):

Ακόμα πιο ποικίλες από τα προβλήματα είναι οι λύσεις τους, ώστε να είναι τελείως αδύνατον να δώσουμε μια σε αποδεκτό έστω βαθμό εξαντλητική επισκόπηση των διαφόρων μεταστροφών που παίρνει η διαδικασία του. **Δεν υπάρχει στον συγγραφέα μας κανένα ίχνος γενικότερων συμπεριληπτικών μεθόδων: κάθε πρόβλημα απαιτεί μια τελείως ειδική μέθοδο, η οποία συχνά δεν μπορεί να εφαρμοστεί ούτε στα πιο παρόμοια προβλήματα**. Είναι, επομένως, δύσκολο για έναν μοντέρνο μαθηματικό, ακόμη και αν έχει μελετήσει 100 διοφαντικές λύσεις, να λύσει το 101ο πρόβλημα· και αν κάποιος κάνει την προσπάθεια και διαβάσει τη λύση του Διόφαντου μετά από μερικές μάταιες προσπάθειες, θα εκπλαγεί βλέποντας πόσο ξαφνικά φεύγει από τον μεγάλο δρόμο, περνάει σε ένα πλάγιο μονοπάτι, και με μια γρήγορη στροφή φτάνει στον στόχο – έναν στόχο η επίτευξη του οποίου συχνά δεν πρέπει να μας ικανοποιεί. Πιστεύαμε ότι είχαμε να ανέβουμε ένα δύσκολο μονοπάτι αλλά στο τέλος θα είχαμε μια πανοραμική θέα ως ανταμοιβή· αντί για αυτό, ο οδηγός μας μάς οδηγεί μέσα από στενά, γραφικά, αλλά ομαλά μονοπάτια σε ένα μικρό ύψωμα, και αυτό ήταν όλο! […]. Ο Διόφαντος περισσότερο μαγεύει παρά προσφέρει απόλαυση..

Διοφάντου *Αριθμητικά*, Πρόβλημα Β.8

1	Να διαιρεθεί ένας προτεινόμενος τετράγωνος σε δύο τετραγώνους.
2	Έστω, λοιπόν, ότι έχει προταθεί να διαιρέσουμε τον 16 σε δύο τετραγώνους.
3	Και έστω ότι ο πρώτος έχει οριστεί να είναι 1 Δύναμη.
4	Άρα ο άλλος θα είναι 16 μονάδες με έλλειψη 1 Δύναμης.
5	Άρα, 16 μονάδες με έλλειψη 1 Δύναμης θα πρέπει να είναι ίσες προς έναν τετράγωνο.
6	Σχηματίζω τον τετράγωνο από οσουσδήποτε Αριθμούς με έλλειψη τόσων μονάδων όσες περιέχει η πλευρά των 16 μονάδων. Έστω (από) 2 Αριθμούς με έλλειψη 4 μονάδων.
7	Άρα ο ίδιος ο τετράγωνος θα είναι 4 Δυνάμεις, 16 μονάδες με έλλειψη 16 Αριθμών.
8	Αυτά είναι ίσα προς 16 μονάδες με έλλειψη 1 Δύναμης.
9	Ας προστεθεί αυτό που λείπει από κοινού και (ας αφαιρεθούν) τα όμοια από τα όμοια. Άρα, 5 Δυνάμεις είναι ίσες προς 16 Αριθμούς, οπότε ο Αριθμός γίνεται 16 πέμπτα.
10	Ο ένας θα είναι 256 25α, ο άλλος 144 25α, και όταν προστεθούν οι δύο γίνονται 400 25α, ήτοι 16 μονάδες, και ο καθένας είναι τετράγωνος.

1–2 πρόβλημα
3 πρώτος ονοματισμός (άμεσος)
4 δεύτερος ονοματισμός (παράγωγος)
5 ημιτελής εξίσωση
6 τρίτος ονοματισμός (με al-istiqrāʾ)
8 εξίσωση

1–2 εξίσωση μιας καμπύλης
3 & 6 εξίσωση μιας ευθείας που περνά από ένα γνωστό σημείο της καμπύλης
8 επιλύουσα εξίσωση

Ερμηνεία με προ-μοντέρνα άλγεβρα	Ερμηνεία με αλγεβρική γεωμετρία
$\square_1 + \square_2 = \square$	$x^2 + y^2 = a^2$
$\square_1 + \square_2 = 16$	$x^2 + y^2 = 16$
$\square_1 \coloneqq 1\text{P}$	$x = t, \quad y = 2t - 4$
$\square_2 \coloneqq 16\mu\ \lambda\ 1\Delta$	$5t^2 - 16t = 0$
$16\mu\ \lambda\ 1\Delta = \square$	$t = \frac{16}{5}.$
$\sqrt{\square} \coloneqq 2\text{A}\ \lambda\ 4\mu$	$x = \frac{16}{5}, \quad y = \frac{12}{5}$
$4\Delta\ 16\mu\ \lambda\ 16\text{A} = 16\mu\ \lambda\ 1\Delta$	$16 - x^2 = y^2$ $y = 2x - 4$
$1\text{A} = \frac{16}{5}.$	
$\square_1 = \frac{256}{25}, \quad \square_2 = \frac{144}{25}$	



Πώς τα βρήκε όλα αυτά ?
Hankel: *Δεν υπάρχει γενική μέθοδος.*

Συνολικά υπάρχουν 160 περιπτώσεις al-istiqrāʾ στα *Αριθμητικά*

Problème	Équation semi-finie	Nom
II.8$_1$	16u ℓ 1P = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 2N \ell 4u$
II.11$_2$	1P 1u = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 1N \ell 4u$
II.12	1P 12u = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 1N \ell 4u$
II.13$_2$	1P ℓ 1u = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 1N \ell 2u$
II.16	3P 18N 9u = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 2N \ell 3u$
II.19	1P 8N 4u = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 1N 3u$
II.20	4P 5N 1u = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 2N \ell 2u$
II.21	4P 3N = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 3N$
II.22	1P 4N 2u = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 1N \ell 2u$
II.23	1P ℓ 2N 1u = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 1N \ell 3u$
II.28	1P 1u = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 1N \ell 2u$
	9P 9u = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 3N \ell 4u$
II.29	1P ℓ 1u = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 1N \ell 2u$
	1P ℓ 1u = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 1N \ell 4u$
II.32	16P 25N 9u = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 4N \ell 4u$
II.33	16P 7N = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 5N$
III.5$_1$	2N = □	□ ≔ 16u
III.6$_1$	6N 1u = □	□ ≔ 121u
III.6$_2$	6N 1u = □	□ ≔ 36u
III.7	1P 4N 2u = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 1N \ell 8u$
III.8	6N 22u = □	□ ≔ 100u
III.9	6N 4u = □	□ ≔ 64u

III.10	1P 12u = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 1N 3u$
III.11	1P ℓ 10u = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 1N \ell 2u$
	5929P ℓ 160u = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 77N \ell 2u$
III.14	16P 33N 16u = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 4N \ell 5u$
III.15$_2$	4N 3u = □	□ ≔ 25u
	4P 8N 3u = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 2N \ell 3u$
III.16	4P ℓ 1u = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 2N \ell 2u$
IV.1	9C = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 6T$
IV.2	7C = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 7T$
IV.3	5M = ▱	$\sqrt[3]{▱} \coloneqq 1T$
IV.4	24M = ▱	$\sqrt[3]{▱} \coloneqq 2T$
IV.5	4MM = ▱	$\sqrt[3]{▱} \coloneqq 2T$
IV.6	8MC = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 4M$
IV.7	64MC = ▱	$\sqrt[3]{▱} \coloneqq 2M$
IV.9	64CC = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 16M$
IV.10	1C 10M = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 4T$
IV.11	1C ℓ 6M = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 2T$
IV.12	1C 10M = ▱	$\sqrt[3]{▱} \coloneqq 2T$
IV.13$_1$	1C ℓ 7M = ▱	$\sqrt[3]{▱} \coloneqq \frac{1}{2}T$
IV.14(e)	$\frac{1}{2}$C = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 2T$
IV.14(f)	2M = ▱	$\sqrt[3]{▱} \coloneqq 1T$
IV.23	17MM = ▱	$\sqrt[3]{▱} \coloneqq 3T$
IV.24	15MM = ▱	$\sqrt[3]{▱} \coloneqq 5T$
IV.25	1CC 16MM = □	□ ≔ 25MM *
IV.26a	1CC ℓ 16MM = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 3M$ *
IV.26b	625MM ℓ 1CC = □	□ ≔ 225MM *
IV.27	1CC 20MM = □	□ ≔ 36MM *
IV.28	16MM 10C = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 6M$
IV.29	1CCC 16CCM = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 6MM$
IV.30	1CCC ℓ 16CCM = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 2MM$
IV.31	16CCM ℓ 1CCC = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 2MM$
IV.32	21CCC = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 7MM$
IV.33	$\frac{1}{4}$CCC = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 1MM$
V.1	$\frac{8}{49}$MM = ▱	$\sqrt[3]{▱} \coloneqq 2T$
V.2	$\frac{1}{4}$MM = ▱	$\sqrt[3]{▱} \coloneqq 2T$
V.3	$\frac{1}{16}$MM = ▱	$\sqrt[3]{▱} \coloneqq \frac{1}{2}T$
VI.1	64CC 1MM = □	□ ≔ 100CC *
VI.2	64CC ℓ 1MM = □	□ ≔ $40\frac{24}{25}$CC *
VI.3	1MM ℓ 64CC = □	□ ≔ 36CC *
VI.4	15,625CC 125CM = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 126C$ *
VI.5	1CM 1MM = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 2M$
VI.6	1CM ℓ 1CC = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 1C$
VI.7	1CM ℓ 1MM = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 1M$

VI.9	64M ℓ 8T = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 7T$
VI.10	8T ℓ 64M = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 4T$
VI.11	1CC 1C = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 3C$
VI.12	$\frac{9}{16}$MM $\frac{9}{16}$M = □	$\sqrt{\square} \coloneqq \frac{13}{16}$M *
VI.13$_1$	$\frac{9}{25}$MM ℓ $\frac{9}{25}$M = □	$\sqrt{\square} \coloneqq \frac{9}{25}$M *
VI.13$_2$	$2\frac{7}{9}$u ℓ $\frac{9}{25}$M = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 1\frac{2}{3}$u ℓ $1\frac{1}{5}$T
VI.14	$\frac{25}{16}$M ℓ $\frac{16}{25}$u = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 1\frac{1}{4}$T ℓ 2u
VI.15	1M ℓ 2T 1u = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 1T \ell 2u$
VI.16	1M 2u ℓ 4T = □	$\sqrt{\square}' \coloneqq 1T \ell 4u$
VI.18	$\frac{25}{16}$M $\frac{25}{16}$u = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 1\frac{1}{4}$T $\frac{1}{4}$u
VI.19	$\frac{9}{16}$M ℓ $2\frac{9}{16}$u = □	$\sqrt{\square} \coloneqq \frac{3}{4}$T ℓ $\frac{1}{4}$u
VI.20	$\frac{9}{25}$M $4\frac{4}{25}$u = □	$\sqrt{\square} \coloneqq \frac{3}{5}$T 1u
VI.21	1M $\frac{5}{16}$u = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 1T \frac{1}{2}$u
VI.22$_1$	1MM 1M = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 1\frac{1}{4}$M
VI.22$_2$	144MM = ▱	▱ ≔ 8C
VI.23	1M 9u = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 1T 1u$
VII.1	512CCC = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 32MM$
VII.2	1C = □	□ ≔ 4M
VII.5	512C 512M = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 64T$
VII.8	1M 4T 2u = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 1T \ell 2u$
VII.9	1M 2u ℓ 4T = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 1T \ell 3u$
VII.10	1M 2T ℓ 1u = □	$\sqrt{\square}'' \coloneqq 1T \ell 3u$
VII.16	1M ℓ 1u = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 1T \ell 2u$
VII.17	25M $2\frac{7}{9}$u = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 5T \frac{1}{3}$u
VII.18	$\frac{9}{25}$M ℓ 25u = □	$\sqrt{\square} \coloneqq \frac{3}{5}$T ℓ 1u
IV^c.6	1C 16P = ▱	▱ ≔ 8C
IV^c.7$_1$	5P = ▱	$\sqrt[3]{▱} \coloneqq 1N$
IV^c.7$_2$	2P 4u = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 2N \ell 2u$
	20P = ▱	▱ ≔ 1C
IV^c.8	3P 3N 1u = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 1u \ell 2N$
IV^c.9	3P 4u ℓ 6N = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 2u \ell 4N$
IV^c.11	3P 3N 1u = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 1u \ell 2N$
IV^c.13	7P 18N 9u = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 3u \ell 3N$
IV^c.14	1P 2N ℓ 2u = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 1N \ell 4u$
IV^c.16	13N = □	□ ≔ 169$\mathcal{P}$ (indeterminate)
	10,816$\mathcal{P}$ 221u = □	□ ≔ 104$\mathcal{N}$ 1u
IV^c.17	13N = □	□ ≔ 169$\mathcal{P}$ (indeterminate)
	10,816$\mathcal{P}$ ℓ 221u = □	□ ≔ 104$\mathcal{N}$ ℓ 1u
IV^c.18	1CC 1N 64u ℓ 16C = □	$\sqrt{\square}' \coloneqq 1C 8u$
	4C = □	□ ≔ 16P
	1CC 4096u 1N ℓ 108C = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 1C 64u$

IV^c.26	8C 1P ℓ 8N 1u = ▱	$\sqrt[3]{▱} \coloneqq 2N \ell 1u$
IV^c.27	8C 1P ℓ 8N 1u = ▱	$\sqrt[3]{▱} \coloneqq 2N \ell 1u$
IV^c.28$_1$	9PP 6P 1u ℓ 4C 12N = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 3P 1u \ell 6N$
IV^c.28$_2$	1C ℓ 2P = ▱	▱ ≔ $\frac{1}{8}$C
IV^c.31$_1$	72P 81u = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 8N 9u$
IV^c.31$_1$	3N 18u ℓ 1P = □	□ ≔ 324P *
IV^c.31$_2$	9N ℓ 1P = □	□ ≔ 4P
	9N ℓ 1P = □	□ ≔ $\frac{25}{16}$P *
IV^c.37	60C = □	□ ≔ 900P
IV^c.38	16P ℓ 71u = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 4N \ell 1u$
IV^c.39	3P 12N 9u = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 3u \ell 5N$ *
IV^c.40	9P ℓ $\frac{42}{32}$u = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 3N \ell 6u$
V^c.2	1P 18N 101u = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 1N \ell 11u$
V^c.3	4P 28N 34u = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 2N \ell 6u$
V^c.4	4P 4N 19u = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 2N \ell 6u$
V^c.5	1P 3N 3u = □	□ ≔ 1N ℓ 3u
V^c.6	1P 1N 1u = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 1N \ell 2u$
L1 V^c.7	1P 1N 1u = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 1N \ell 2u$
V^c.9	26P 1u = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 5N 1u$
V^c.10	9u ℓ 1P = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 3u \ell 3\frac{1}{2}$N *
V^c.11	30P 1u = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 5N 1u$
V^c.12	10P 1u = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 3N 1u$
	30P 1u = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 5N 1u$
	$\frac{6561}{841}$u ℓ 1P = □	$\sqrt{\square} \coloneqq \frac{81}{29}$u ℓ $2\frac{1}{2}$N *
V^c.13	16u ℓ 1P = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 4u \ell 2\frac{1}{2}$N *
V^c.14	34P 1u = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 6N \ell 1u$
V^c.15	9P 14u ℓ 9N = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 3N \ell 4u$
V^c.17	9P 31u ℓ 27N = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 3N \ell 7u$
V^c.27	$6\frac{1}{4}$P′ 25P ℓ 9u = □	□ ≔ 25P
V^c.28	$6\frac{1}{4}$P $6\frac{1}{4}$P′ ℓ 25u = □	□ ≔ $6\frac{1}{4}$P′
V^c.29	1P 4u = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 1N 1u$
V^c.30	1P ℓ 60u = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 1N \ell 20u$ *
VI^c.1	2P = ▱	▱ ≔ 1C
	1N ℓ 2u = ▱	▱ ≔ 8u
VI^c.2	1N 2u = ▱	▱ ≔ $\frac{27}{8}$u *
VI^c.3	100P 505u = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 10N 5u$
VI^c.4	36P ℓ 60u = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 6N \ell 2u$
VI^c.5	65P 25u = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 5u 8N$
L2 VI^c.12	3P 6N 9u = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 3u \ell 3N$
VI^c.12	30P 12N = □	□ ≔ 36P
VI^c.13	6P ℓ 4N = □	□ ≔ 1P *
	3$\mathbb{P}$ 6$\mathbb{N}$ 9u = □	$\sqrt{\square} \coloneqq 6\mathbb{N} \ell 3u$
VI^c.14	60P ℓ 8N = □	□ ≔ 36P